

INESTABILIDAD DE PLACAS PLEGADAS PRISMATICAS POR EL METODO DE BANDAS FINITAS

LUIS A. GODOY
y
CARLOS A. PRATO

*Departamento de Estructuras, F.C.E.F. y N.,
Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de Correo 916 - 5000 Córdoba, Argentina*

RESUMEN

El método de bandas finitas se emplea para determinar cargas de bifurcación de láminas plegadas prismáticas apoyadas en diafragmas en sus extremos. La formulación de estabilidad es de tipo energético y permite tratar tanto cargas sólidas como líquidas, incluyendo la influencia del movimiento de un líquido en modos de inestabilidad torsional. Se presentan ejemplos numéricos para evaluar convergencia de la solución y aplicaciones a problemas de inestabilidad torsional de vigas de pared delgada. Estudios paramétricos realizados sobre un ejemplo permiten comparar distintas formas de sección transversal en su comportamiento en pandeo.

SUMMARY

The finite strip method is used to evaluate bifurcation loads in prismatic plate assemblies supported on end diaphragms. The stability formulation is based on an energy principle and can take into account solid and liquid-type loading, including the influence of the movement of a liquid in torsional instability modes. Numerical examples are presented to evaluate convergence of the solution, and applications to problems of torsional instability of thin-walled beams are discussed. For a particular example, parametric studies are carried out to compare the buckling behaviour of different beam cross sections.

INTRODUCCION

En el contexto del presente trabajo, la denominación de placas plegadas prismáticas se aplica a todo conjunto o ensamblaje de elementos planos cuya superficie media es prismática y cuyo espesor es pequeño frente a las dimensiones generales. Esta designación incluye aquellos casos en que por las proporciones entre las dimensiones geométricas de la sección y la longitud total podrían ser tratadas por la teoría de vigas de pared delgada, pero que serán aquí analizadas por el método más general de bandas finitas.¹ La determinación de cargas críticas de inestabilidad de placas plegadas prismáticas es de sumo interés en múltiples situaciones de diseño, tanto para el estudio de fenómenos globales como localizados de inestabilidad, y será formulado siguiendo las líneas generales formulados en ². Como es característico del método de bandas finitas, las funciones de aproximación cubren la totalidad del dominio en el sentido de las aristas del prisma, mientras que en la dirección transversal sólo cubren el ancho de la banda considerada, constituyendo una forma de combinación de las modalidades locales y globales del método de Ritz. La formulación variacional que se desarrolla

Recibido: Enero 1986

permite la identificación de modos locales y globales de inestabilidad, y la diferencia entre ellos no proviene del procedimiento de análisis usado sino de la forma misma del modo crítico.

Una reseña reciente de las aplicaciones de bandas finitas en problemas de inestabilidad puede encontrarse en ². Las primeras aplicaciones del método para determinar cargas de bifurcación bajo cargas laterales se deben a Graves Smith y Sridharan³, quienes consideraron inestabilidad en modos flexionales. La inestabilidad en modos torsionales bajo cargas laterales, empleando el método de bandas finitas, fue tratado originalmente por los autores en^{4, 5}, en donde el problema está tratado por medio de una condensación.

A partir de una formulación general, en el presente trabajo se investiga el fenómeno de inestabilidad torsional de placas plegadas bajo cargas gravitatorias de tipo sólido y líquido, poniéndose de manifiesto la significativa diferencia en cargas críticas entre ambos casos. En los ejemplos numéricos que se desarrollan en este trabajo se utilizó sólo la primera componente armónica de las funciones de interpolación, de manera que se limita la posibilidad de detectar modos locales que podrían surgir del acoplamiento entre los distintos armónicos en el sentido longitudinal. Sin embargo, esta restricción no limita la validez de los resultados obtenidos debido a que el acoplamiento de los diversos armónicos no modifica significativamente el modo crítico estudiado.

FORMULACION DEL PROBLEMA DE ESTABILIDAD

Se considerará una estructura de paredes delgadas constituida por K láminas delgadas, como se ilustra en la Figura 1. Los ejes globales coordenados se designan por X_r ($r=1,3$), mientras que para cada lámina componente se adoptarán ejes locales x_r . En particular, el análisis considerará estructuras cuya sección según el plano $X_2 X_3$ no varíe en sentido X_1 , y apoyadas en los extremos $X_1 = 0$ y $X_1 = L$.

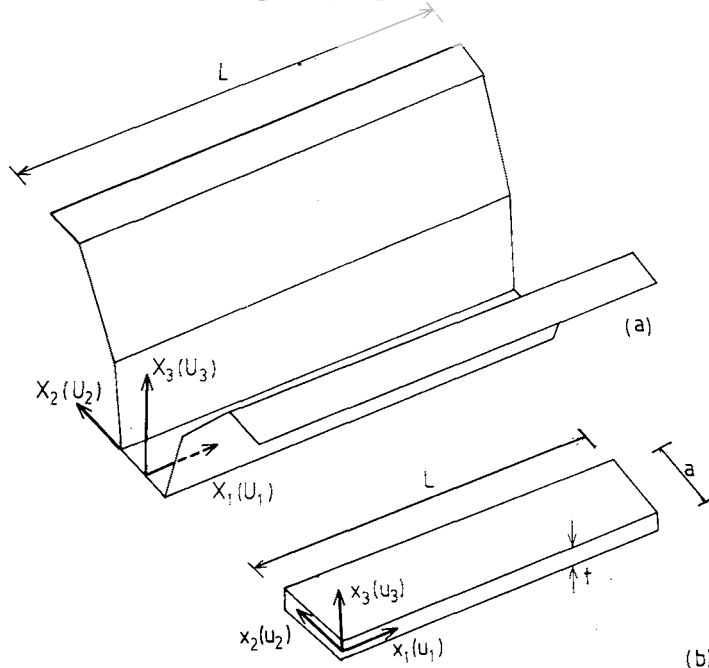


Figura 1.— Ejes coordenados y dimensiones consideradas.
(a) En una estructura típica. (b) En una banda finita.

El cambio de energía potencial total π entre un estado sin tensiones ni deformaciones, y un estado arbitrario deformado, puede escribirse como

$$\pi = \sum_{k=1}^k \left\{ \frac{t}{2} \iint (n_{ij} \epsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dx_1 dx_2 - t \iint (p_1 u_1 + p_3 u_3) dx_1 dx_2 - t \int [P_1 U_1]_{x_1=0}^{x_1=L} dx_2 \right\} \quad (1)$$

$i, j = 1, 2$

donde n_{ij} , m_{ij} representan los esfuerzos y momentos resultantes en el espesor t de la lámina; ϵ_{ij} y χ_{ij} las deformaciones y cambios de curvatura; u_1 , u_3 los desplazamientos; P_1 , P_3 las componentes de cargas distribuidas; y P_1 las cargas axiales aplicadas en los extremos $x_1 = 0$ y $x_1 = L$. Las cargas lineales de arista pueden ser incluidas en la ecuación (1) sin dificultades.

Para describir deformaciones de las láminas se distinguirá entre las componentes lineales y no lineales en desplazamientos, resultando:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^I + \epsilon_{ij}^{II} \quad (2)$$

donde

$$\epsilon_{ij}^I = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

$$\epsilon_{ij}^{II} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (4)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Sin embargo, no todos los términos en ϵ_{ij}^{II} son significativos en estructuras largas. En efecto, los términos no lineales asociados a u_1 son despreciables, y términos no lineales que contribuyen significativamente son ⁶

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^{II} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{22}^{II} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \\ \epsilon_{12}^{II} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Los cambios de curvatura se describen a través de relaciones lineales de los desplazamientos en la forma

$$\chi_{ij} = -\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_j} \quad (6)$$

donde β_i es el giro de la normal a la superficie media.

$$n_{ij} = \frac{Et}{1+\nu} (\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \epsilon_{ll}) \quad (7)$$

$$m_{ij} = \frac{Et^3}{12(1+\nu)} (\chi_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \sigma \chi_{ll}) \quad (8)$$

para $l = 1, 2$, en donde E es el módulo elástico; ν es el coeficiente de Poisson del material, y δ_{ij} es la delta de Kroenecker.

Supóngase conocida una trayectoria fundamental de equilibrio de la estructura, y las variables asociadas a la misma identificadas con el superíndice $()^f$. En la vecindad de un estado de bifurcación a partir de la trayectoria fundamental, los desplazamientos en la trayectoria secundaria, identificados con el superíndice $()^s$, podrán escribirse como:

$$\begin{aligned} u_1^s &= u_1^f + u_1 \\ u_3^s &= u_3^f + u_3 \end{aligned} \quad (9)$$

donde u_1, u_3 son desplazamientos incrementales, medidos a partir del estado fundamental.

Si la trayectoria fundamental de equilibrio se considera lineal en u^f (lo que es una muy buena aproximación en muchos casos), pero la trayectoria secundaria se supone no lineal en desplazamientos incrementales, las deformaciones y esfuerzos en la trayectoria secundaria resultan

$$\epsilon_{ij}^s = \lambda \epsilon_{ij}^f + \epsilon_{ij}' + \epsilon_{ij}'' \quad (10)$$

$$\chi_{ij}^s = \lambda \chi_{ij}^f + \chi_{ij}' \quad (11)$$

$$n_{ij}^s = \lambda n_{ij}^f + n_{ij}' + n_{ij}'' \quad (12)$$

$$m_{ij}^s = \lambda m_{ij}^f + m_{ij}' \quad (13)$$

El parámetro de carga, λ , empleando en las ecuaciones (10-13) permite distinguir entre distintos niveles de carga sobre la trayectoria fundamental. Se supone que las cargas actuantes se incrementan a través de un único parámetro λ para toda la estructura. Para el caso en que las fuerzas no dependen de las deformaciones, pueden expresarse en la forma

$$\begin{aligned} p_i &= \lambda p_i^f \\ p_3 &= \lambda p_3^f \end{aligned} \quad (14)$$

Reemplazando las (9 - 14) en la (1), se puede reescribir la energía potencial tal como

$$\pi = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \quad (15)$$

donde π_0 representa la ecuación de energía potencial total (1) escrita en el estado fundamental. Los términos que dependen linealmente de desplazamientos incrementales se agrupan en π_1 , que resulta

Debido a que los esfuerzos y cargas en el estado fundamental se encuentran en equilibrio, la expresión de π_1 deberá ser nula para cualquier estado incrementado que sea cinemáticamente admisible, resultando

$$\pi_1 = 0 \quad (17)$$

Los términos que son cuadráticos en desplazamientos incrementales se agrupan en π_2 , y puede escribirse en la forma

$$\pi_2 = \sum_{k=1}^k \left\{ \frac{t}{2} \iint (n_{ij}^l \epsilon_{ij}^l + m_{ij}^l \chi_{ij}^l) dx_1 dx_2 + \frac{\lambda}{2} \iint (n_{ij}^f \epsilon_{ij}^f + n_{ij}^f \epsilon_{ij}^f) dx_1 dx_2 \right\} \quad (18)$$

π_3 y π_4 contienen los términos que dependen en forma cúbica y cuártica de desplazamientos incrementales. En la vecindad de un punto de bifurcación, los desplazamientos incrementales pueden considerarse arbitrariamente pequeños, despreciándose los términos de orden superior. Equilibrio de la trayectoria secundaria en el punto de bifurcación puede obtenerse de la expresión

$$\delta \pi_2 = 0 \quad (19)$$

Nótese que en base a la hipótesis que las cargas exteriores son independientes de los desplazamientos asociados al modo crítico (u_1, u_3), el funcional π_2 de la ecuación (18) no contiene términos provenientes de las cargas exteriores, salvo aquellas del tipo $\lambda n_{ij}^f \epsilon_{ij}^f$ y $\lambda m_{ij}^f \chi_{ij}^f$.

Cuando la carga exterior proviene del peso de un líquido contenido en la sección, como se indica en la Figura 2, el giro de la sección debida al modo crítico de deforma-

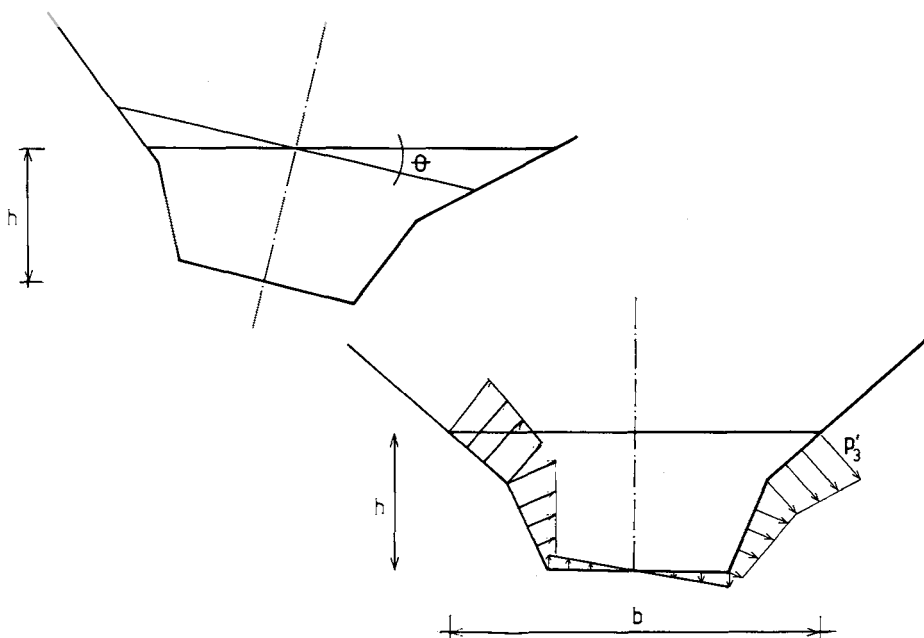


Figura 2.— Influencia de una carga de líquido.

ción produce un cambio en la intensidad de la presión hidrostática en cada punto de la misma. La ecuación (14) puede ser escrita ahora en la forma

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ p_3 &= \lambda p_3^f + p_3' \end{aligned} \quad (20)$$

El cambio de presión hidrostática en cada punto está dada por

$$p_3' = \gamma_w \cdot \delta h = \gamma_w \beta_2 x_2 \quad (21)$$

donde γ_w es el peso específico del líquido, δh es el cambio de altura del líquido debido a la rotación β_2 de la lámina alrededor del eje global x_1 . El cambio de presión p_3' origina un término adicional en el potencial π_2 de la forma

$$I_2 = - \frac{\gamma_w}{2} \sum_{k=1}^k \iint \beta_2 x_2 u_3 dx_1 dx_2 \quad (22)$$

El factor 1/2 en la (22) corresponde al hecho que p_3 varía linealmente con u_3 , y por lo tanto su energía potencial deberá ser expresada en función del valor total de desplazamiento u_3 . La integración de la (22) se extiende a la parte de la estructura sobre la que presiona el líquido; por lo tanto los límites de las integrales dependen del nivel de carga λ .

Una forma más simple de la (22) puede lograrse si se incluye la hipótesis adicional que el desplazamiento incremental u_3 proviene de un giro θ de la sección transversal sin

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

$$\begin{aligned} u_3 &= \theta \cdot x_2 \cdot \cos \alpha \\ \beta_2 &= \theta \end{aligned} \quad (23)$$

en donde α es el ángulo de inclinación de la lámina, como se indica en la Figura 3. Remplazando las (23) en la (22) se obtiene

$$I_2 = - \frac{\gamma_w}{2} \sum \int_{x_1} \theta \int_{x_2} x_2^2 dx_1 dx_2 \quad (24)$$

Para secciones transversales prismáticas, integrando en el intervalo $x_2 = [-b/2, b/2]$ donde b es el ancho de la sección del líquido indicado en la Figura 3, se tiene

$$I_2 = - \frac{\gamma_w}{2} \int_{x_1} \theta^2 \frac{b^3}{12} dx_1 \quad (25)$$

La variación δI_2 da origen al término especial dado en las ecuaciones (8) y (11) de ⁴.

Para un material elástico, isótropo y homogéneo, las ecuaciones constitutivas se escriben como

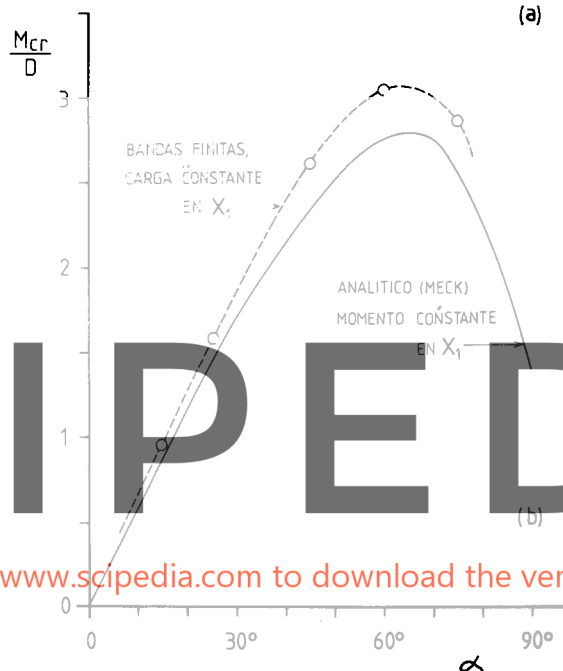
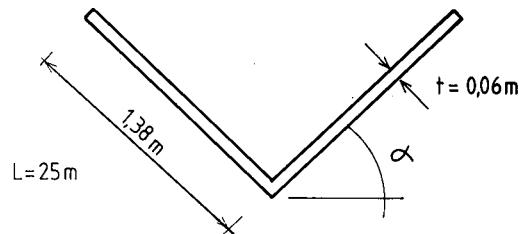


Figura 3.— Inestabilidad de una sección ángulo bajo carga tipo peso propio.
(a) Dimensiones de la estructura. (b) Momento crítico para distintos valores de $\alpha \cdot D = Et^3/12(1-\nu^2)$

DISCRETIZACION POR BANDAS FINITAS

Los aspectos básicos de la formulación del método de bandas finitas para determinar cargas críticas en láminas plegadas bajo cargas axiales o transversales fueron presentados por Graves Smith y Sridharan en 1978.³ El campo de desplazamientos incrementales en cada banda usado en ³ y en el presente trabajo es el denominado LO2 por Cheung¹, y definido por la expresiones

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m=1}^M \phi_1^m \cos m \frac{\pi x_1}{L} \\ u_2 &= \sum_{m=1}^M \phi_2^m \operatorname{sen} m \frac{\pi x_1}{L} \\ u_3 &= \sum_{m=1}^M \phi_3^m \operatorname{sen} m \frac{\pi x_1}{L} \end{aligned} \quad (26)$$

en donde las funciones polinómicas ϕ^m están dadas por

$$\begin{aligned}\phi_1^m &= N^1 u_1^{1m} + N^2 u_1^{2m} \\ \phi_2^m &= N^1 u_2^{1m} + N^2 u_2^{2m} \\ \phi_3^m &= N^3 u_3^{1m} + N^4 u_3^{2m} + N^5 \beta_2^{1m} + N^6 \beta_2^{2m}\end{aligned}\quad (27)$$

siendo

$$\begin{aligned}N^1 &= 1 - \eta & N^2 &= \eta \\ N^3 &= 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 & N^4 &= 3\eta^2 - 2\eta^3 \\ N^5 &= \frac{1}{a} (\eta - 2\eta^2 + \eta^3) & N^6 &= \frac{1}{a} (\eta^3 - \eta^2)\end{aligned}\quad (28)$$

$$\eta = \frac{x_2}{a} \quad (29)$$

En $x_1 = 0$ y $x_1 = L$, se satisfacen las condiciones de borde

$$u_2 = u_3 = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = 0 \quad (30)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

mientras que en las uniones entre placas se satisface la condición de compatibilidad entre desplazamientos. Los grados de libertad del elemento en el sistema coordinado local resultan amplitudes de desplazamientos y rotaciones de la normal sobre los lados del elemento, y para cada modo m considerado.

$$\mathbf{u}^m = \{u_1^{1m}, u_2^{1m}, u_3^{1m}, \beta_2^{1m}, u_1^{2m}, u_2^{2m}, u_3^{2m}, \beta_2^{2m}\} \quad (31)$$

Reemplazando las (26) en la (19) se expresa la condición de bifurcación como un problema de vectores y valores propios. Si la carga aplicada es tipo peso propio, el sistema resulta

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_G) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (32)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la estructura (primer término de la ecuación 18); y \mathbf{K}_G es la matriz de carga - geometría (segundo término de la 18). Las integrales necesarias para obtener las matrices se han efectuado en forma numérica, pero podrían explicitarse sin demasiado esfuerzo analítico.

Para inestabilidad lateral-torsional bajo carga de líquido que aumenta, el problema de autovalores es en general no lineal y de la forma

$$[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_G - \mathbf{K}_w(\lambda)] \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (33)$$

donde K_w es una matriz asociada al efecto desestabilizante del líquido, obtenida de la integral (22). La ecuación (33) presenta la particularidad que el término del líquido depende de manera no explícita del parámetro λ . Sin embargo, el problema puede ser transformado en una ecuación lineal de autovalores sujeta a una restricción. En efecto, consideremos una estimación λ_1 a los efectos de evaluar K_w ; la ecuación (33) resulta

$$[(K - K_w(\lambda_1)) - \lambda K_G] U = 0 \quad (34)$$

de la cual se obtiene el valor mínimo de λ . La restricción en este caso es que

$$\lambda_1 = \lambda \quad (35)$$

hay que decir que la carga crítica mínima λ debe coincidir con la supuesta para evaluar K_w . Los resultados que se presentan en la sección siguiente están basados en las ecuaciones (34 - 35) para carga líquida.

RESULTADOS NUMERICOS

Con el fin de ilustrar el empleo de las técnicas descritas en las secciones anteriores se presentan a continuación varios ejemplos, comparando resultados cuando es posible con otras soluciones teóricas y experimentales.

Inestabilidad de una sección ángulo bajo carga tipo peso propio

Como primer ejemplo, se determinarán cargas críticas para un caso para el que existen soluciones analíticas aproximadas en la literatura. La Figura 3.a muestra las características de una viga de pared delgada de sección ángulo, bajo la acción de una carga tipo peso propio. El momento crítico de la sección central se ha dibujado en la Figura 3.b para distintos valores del ángulo α de las placas respecto de la horizontal; y se comparan los resultados numéricos obtenidos empleando 1 modo y 7 elementos en la presente formulación, con los analíticos dados por Meck.⁷ La comparación resulta satisfactoria, y la diferencia entre ambas soluciones está asociada a la naturaleza distinta de las cargas consideradas (la solución de Meck es para un estado con momento constante en X_1), y con las simplificaciones introducidas en ⁷ que no fueron realizadas en la presente formulación. Tal como lo menciona Meck, existe un rango importante de estructuras para el que el momento crítico es independiente de la longitud de la viga. Por ejemplo, si se reduce la longitud en un 40%, el momento crítico sólo aumenta en 6%.

Inestabilidad de una sección trapezoidal bajo carga de líquido

Para este problema no existen resultados en la literatura aparte de los obtenidos por los autores, y será estudiado en detalle en esta sección. Considérese, en primer lugar, el estado fundamental de tensiones para el problema de la Figura 4. La Tabla I muestra los valores de esfuerzos resultantes en la placa inferior, obtenidos para distintos estados de carga (peso propio, carga uniforme sobre la placa inferior, y peso propio más carga hidrostática) cuya resultante en la sección transversal es unitaria. Las diferencias que se observan en esfuerzos n_{11}^f son de 0,2%, mientras que n_{22}^f presenta diferencias mayores, pero su valor es mucho menor que n_{11}^f . Dos conclusiones importantes pueden obtenerse

SCIPEDIA

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

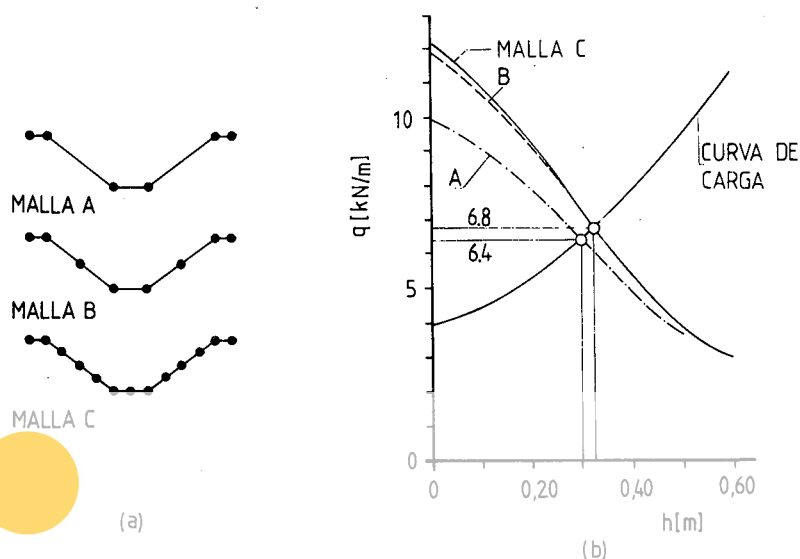


Figura 4.— Inestabilidad de una sección trapezoidal bajo carga de líquido.
(a) Discretizaciones empleadas. (b) Convergencia de la solución. Datos en Tabla I.

Carga	n_{11}^f [kN/m]	n_{22}^f [kN/m]
Peso propio	164.45	0.90
Peso propio más líquido en toda la sección	164.15	1.10
Carga uniforme en la placa inferior	164.48	0.90

Tabla I. Estado fundamental para una estructura con $E = 2.17 \cdot 10^7$ kN/m²; $\nu = 0.15$; $L = 25.0$ m; $t = 0.06$ m; $H = 0.65$ m; $B = 2.50$ m; $B_0 = 0.40$ m; resultante de carga en la sección transversal, $q = 1$ kN/m en todos los casos. Discretización: 10 elementos, 1 modo.
(Variables definidas en la Figura 5.a)

de los resultados anteriores: en primer lugar, la influencia de n_{11}^f es mucho mayor que n_{22}^f , y podría eventualmente despreciarse n_{22}^f , para el problema de estabilidad en este caso. En segundo lugar, para la determinación de n_{11}^f es irrelevante qué estado fundamental de carga se considere, pudiendo emplearse el correspondiente a peso propio.

Estudios de convergencia de la solución empleando las discretizaciones que se muestran en la Figura 5.a han sido dibujadas en la Figura 5.b. Al aumentar el nivel de líquido h , el efecto desestabilizante asociado al movimiento del líquido produce una caída en la carga crítica, al resolver la ecuación (34). En la figura se muestra además la

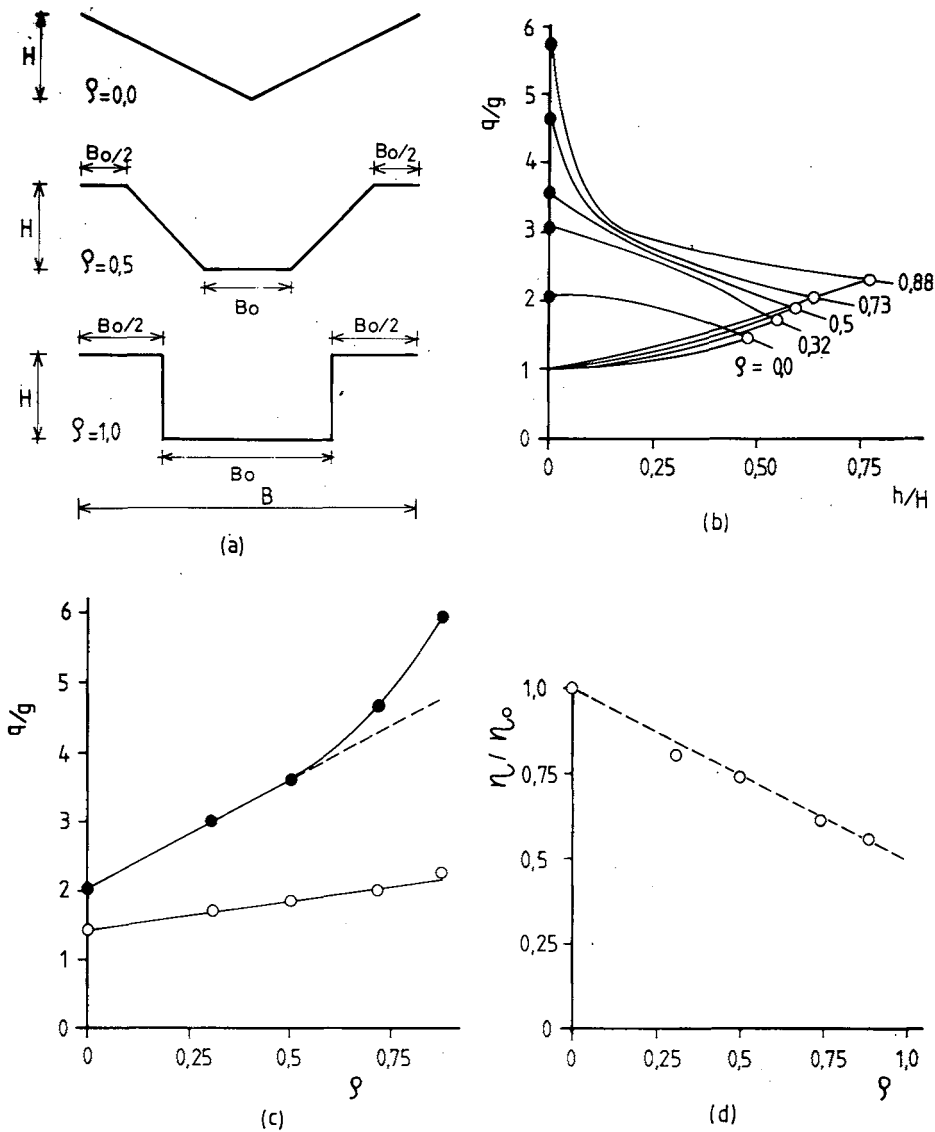


Figura 5.— Influencia de la forma de la sección transversal.
 (a) Parámetros considerados. (b) Determinación de cargas críticas.
 (c) Comparación de cargas críticas para sólido y líquido.
 (d) Factores de reducción por carga líquida.

curva de carga para la sección considerada; el valor crítico para carga de líquido debe satisfacer la ecuación (35), y se alcanza cuando las dos curvas se intersectan, en cuyo caso el nivel de carga disponible es suficiente para producir inestabilidad lateral-torsional. Se observa que no se ha empleado la condición de simetría de la sección porque se supone desconocido el centro de corte de la misma. Los resultados para 32 y 52 grados de libertad (mallas B y C respectivamente) son prácticamente coincidentes, mientras que la diferencia entre las soluciones obtenidas para 24 y 52 grados de libertad son de sólo 6%.

Para una sección semejante a la de la Figura 5, resultados experimentales ⁸ obtenidos para dos estructuras con carga de agua mostraron inestabilidad torsional para valores de carga ⁸, 17% inferiores a los obtenidos por bandas finitas.

Influencia de la forma de la sección transversal

En lo que sigue, se presenta una aplicación del modelo desarrollado en este trabajo al diseño de vigas de pared delgada. Con referencia a la Figura 5.a, se estudian distintas secciones transversales con el mismo ancho total B , altura H y longitud entre apoyos L . Como casos extremos, se consideran una sección ángulo, V , y una sección U . En todos los casos, la placa inferior mide el doble que cada ala lateral, y se ha definido un parámetro de forma de la sección, ϑ , dado por

$$\vartheta = \frac{2B_o}{B} \quad (36)$$

que toma valores entre 0 y 1.

Los resultados de la Figura 5.b, normalizados con respecto al peso propio g , muestran que los valores inferiores de carga crítica q considerando el efecto del líquido corresponden a la sección ángulo ($\vartheta = 0$), y crecen al aumentar ϑ . En la Figura 5.c se muestran cargas críticas para carga tipo peso propio y para carga líquida, obtenidos para distintos valores de ϑ . Se observa que en ambos casos hay una dependencia aproximadamente lineal entre q/g y el parámetro ϑ , y sólo para $\vartheta > 0,6$ se apartan los resultados de una relación lineal. En todo caso, para carga líquida la relación es lineal para $\vartheta < 0,80$.

Los resultados de la Figura 5.c se han normalizado definiendo un parámetro η , dado por

$$\eta = \frac{q_w}{q_s} \quad (37)$$

donde q_w es la carga crítica para líquidos y q_s para carga tipo peso propio. Para valores de ϑ pequeños, la relación de carga crítica η es pequeña, y crece con ϑ . En la Figura 5.d se dibuja la relación η/η_o , donde η_o corresponde a la sección ángulo, $\vartheta = 0$. Se observa que la disminución de η/η_o con ϑ es prácticamente lineal, pudiendo ser aproximada por

$$\frac{\eta}{\eta_o} = 1 - \frac{1}{2} \vartheta \quad (38)$$

De la Figura 5.d se concluye que si se conocen las cargas críticas para una sección ángulo, se pueden estimar los valores correspondientes a otras secciones relacionadas.

CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación de bandas finitas para determinar cargas de bifurcación de placas plegadas prismáticas apoyadas en tímpanos en sus extremos. La formulación permite tomar en cuenta tanto inestabilidad flexional como inestabilidad lateral-torsional, incluyendo el caso en que la carga proviene de un líquido. A diferencia de un trabajo previo de los autores, en que la inestabilidad para carga líquida era tratada condensando el problema a un grado de libertad (el giro de la sección transversal sin cambio de forma), en la solución presente se resuelve un problema de valores propios en todos los grados de libertad del sistema discreto. Eso permite eventualmente detectar no solo la menor carga de bifurcación, sino otras que ocurran en su proximidad.

Los resultados numéricos presentados corresponden a una componente armónica en dirección longitudinal debido al tipo de inestabilidad que se desea modelar; sin embargo, el método de bandas finitas es más general y permite también detectar modos locales a través del acoplamiento de armónicos. Se muestra además que para obtener buenos resultados sólo es necesario emplear un número reducido de grados de libertad, aún para carga líquida. Debido a ello, las soluciones pueden ser obtenidas empleando un microcomputador.

Los ejemplos de interés en ingeniería estructural que ilustran el uso del método ponen en evidencia la reducción de cargas de bifurcación en modos torsionales cuando la carga es de tipo líquido, comparados con cargas sólidas. Esa reducción depende de la forma de la sección transversal, como se ilustra en los estudios paramétricos, correspondiendo las menores reducciones a la sección ángulo.

REFERENCIAS

1. Y. K. Cheung. *Finite strip method in structural analysis*. Pergamon Press, Oxford, Inglaterra, (1976)
2. L. A. Godoy. "Finite strip methods for instability of prismatic plate assemblies", en *Computational Mechanics* (S.R. Idelsohn ed.), Pentech Press, Londres, Inglaterra (en imprenta).
3. T. R. Graves Smith y S. Sridharan. "A finite strip method for the buckling of plate structures under arbitrary loading". *Int. J. Mechanical Sciences*, **20**, 685-693, (1978).
4. L. A. Godoy y C. A. Prato. "Buckling of thin-walled beams under water loading". *J. Structural Div., Am. Soc. Civ Engrs.* **110** (11), 2667-2676, (1984).
5. L. A. Godoy y C. A. Prato. "Buckling of thin-walled beams under water loading". Capítulo 31 en *Handbook of Civil Engineering* (P. N. Cheremisinoff ed.), Technomic Publishing, New Jersey, E.U. (en imprenta).
6. S. Sridharan. "A semianalytical method for the post-local torsional buckling analysis of plate structures". *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **18**, 1685-1699, (1982).
7. H. R. Meck. "Instability of an angle section beam under an applied bending moment". *Int. J. Mechanical Sciences*, **11**, 199, (1969).
8. L. A. Godoy, C. A. Larsson y C. A. Prato. "Experimental buckling loads of water loaded beams". (A ser publicado).